



## CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'INSTABILITE D'UN ECOULEMENT DE CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE

| Léonide Tongazara <sup>1\*</sup> | Michel Aimé Randriazanamparany <sup>2</sup> | Heriniaina Joslin | and | Rabemanatsoa <sup>1</sup> |

<sup>1</sup> Faculté des Sciences | Université d'Antsirana, B.P.0 |

<sup>2</sup> Ecole Supérieure Polytechnique | Université d'Antsirana, B.P.0 | Antsirana 201 | Madagascar |

|Received | 06 July 2017|

|Accepted | 26 July 2017|

|Published 09 August 2017 |

### RESUME

**Contexte :** Le nombre des applications de transfert thermique dans lesquels la convection naturelle est le phénomène dominant est grand. Une meilleure compréhension de ce phénomène augmente le nombre de ces applications et mène à un certain nombre de conceptions industrielles et environnementales sophistiquées. **Objectif :** Dans ce travail, nous proposons une étude numérique de la convection naturelle bidimensionnelle instationnaire qui se développe dans une enceinte rectangulaire de dimensions  $a \times b$ , disposée horizontalement et contenant de l'air. Le plancher est porté à une température  $T_c$  chaude, le plafond à une température  $T_f$  froide, et les deux parois latérales sont adiabatiques. **Méthode :** Les équations sont en formulation « fonction de courant-vorticité » et intégrées à l'aide de la méthode des différences finies. **Résultats :** L'étude des comportements thermique et dynamiques du système par variation du nombre de Rayleigh nous a révélé que le nombre des cellules convectives varie ainsi que la répartition des surfaces de même température quand on augmente ce dernier. **Conclusion :** Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'instabilité se manifestant au niveau de la structure spatiale de la convection, que nous avons illustrée à l'aide des lignes de courant et des isothermes.

**Mots clés :** Convection naturelle, écoulement instationnaire, différence finie, nombre de Rayleigh.

### ABSTRACT

**Background:** The number of the applications of thermal transfer in which the natural convection is the phenomenon dominating is large. A better comprehension of this phenomenon increases the number of these applications and leads to a certain number of industrial and environmental designs sophisticated. **Objective:** In this work, we propose a numerical study of the unsteady two-dimensional natural convection which develops in a rectangular enclosure of dimensions  $a \times b$  containing air. The floor is raised to a warm temperature  $T_c$ , the ceiling to a cold temperature  $T_f$ , and the two side walls are adiabatic. **Methods:** The equations are in the form of "current-vorticity function" and are integrated using finite differences. **Results:** The study of the behaviors thermal and dynamic of the system by variation of the number of Rayleigh revealed us that the number of the convective cells varies as well as the distribution of the same surfaces temperature when this last is increased. **Conclusions:** We have thus been able to demonstrate the instability manifested in the spatial structure of convection, which we have illustrated with the aid of current lines and isotherms. **Keywords:** Natural convection, unsteady flow, finite difference, Rayleigh number.

## 1. INTRODUCTION

L'équilibre statique d'un fluide dans le champ de pesanteur est une situation bien moins anodine qu'il n'y paraît. Pour que cet équilibre soit possible, les forces de volume telles que le poids, doivent être compensées exactement par les gradients de pression, lesquels sont eux-mêmes contraints par la condition de conservation de masse. Il suffit de modifier localement la densité de fluide pour que cet équilibre fragile soit brisé. Il en résulte ainsi le mouvement qu'on appelle « convection naturelle » [07].

Il existe de nombreuses applications du transfert thermique dans lequel la convection naturelle est le phénomène dominant et beaucoup de travaux ont été entrepris pour étudier la convection naturelle dans des cavités de différentes géométries.

Pour ce qui est de l'instabilité, on peut citer principalement les travaux de L. Abdelkrim (Année) portant sur l'étude numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé de fluide dans une cavité carrée à orientation variable [01]. Il a été observé qu'aux angles d'inclinaison proches de zéro, le mode préféré de la circulation est le mode multicellulaire, tandis qu'à des plus grands angles d'inclinaison, le mode préféré est monocellulaire. Le changement se produit à environ 30° d'inclinaison pour une cavité de rapport longueur/hauteur égal à 3 et 5. Il a été constaté aussi que le nombre maximum de cellules est de 9, dans le cas où le rapport longueur/hauteur est égal 3 tandis que pour le rapport longueur/hauteur égal à 5, 16 cellules apparaissent pour un angle d'inclinaison égal à 0°. Une analyse approfondie de ce point a été faite pour essayer de voir si le nombre de cellules dépend de la finesse du maillage ou non. Les maillages 31×93, 51×153 et 71×123 ont été utilisés pour une cavité de rapport longueur/hauteur égal à 3 et

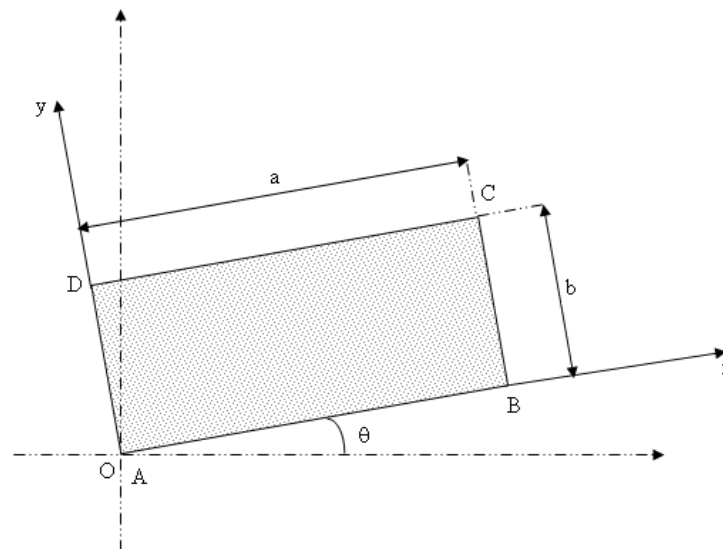
dans aucun de ces cas, le nombre de cellules ne dépasse pas 9. C'est dans cette optique que nous avons entrepris le présent travail numérique. Notre principal objectif est de pouvoir analyser la variation du nombre de cellules convectives présentes dans la cavité rectangulaire lorsque l'on fait varier la différence de température entre le plancher et le plafond, pour un rapport longueur/hauteur fixé à 3.

## 2. MATERIELS ET METHODES

### 2. Formulation mathématique du problème

**2.1 Description du système étudié et équations :** On considère une cavité rectangulaire de dimensions  $a \times b$ , supposée très allongée suivant la direction  $\vec{z}$ . Le rapport longueur/hauteur appelé « facteur de forme  $\frac{a}{b}$  » est égal à 3.

Le plancher AB est à une température chaude  $T_c$ , le plafond DC à une température  $T_f$  froide et les parois latérales BC, AD sont adiabatiques. Initialement, au démarrage des calculs, afin d'amorcer la convection, la cavité est inclinée par rapport à l'horizontal d'un angle  $\theta$  très faible comme le montre la figure 1. Elle est ensuite ramenée à une position rigoureusement horizontale.



**Figure 1 :** La figure montre la géométrie du problème considéré.

Au sein de la cavité, les transferts thermiques sont gouvernés par les équations classiques de la convection naturelle. Nous adoptons alors les hypothèses simplificatrices suivantes. Les propriétés du fluide sont constantes à l'exception de la masse volumique dans le terme de la poussée, qui induit les forces de gravité dont les variations obéissent à l'approximation de Boussinesq. La dissipation visqueuse est négligeable dans l'équation de l'énergie. Le fluide est newtonien. Les échanges par rayonnement sont négligeables entre les parois. L'air est supposé être un gaz parfait. Sous ces hypothèses, les équations adimensionnelles avec la formulation fonction de courant-vorticité s'écrivent comme suit :

Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1)$$

- Equation de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \text{Pr Ra} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y} \sin \theta \right) \quad (2)$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

- Equation de la fonction de courant :

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

- Equations liant la fonction de courant aux composantes de la vitesse :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5}$$

Conditions initiales :

A l'instant  $t \leq t_0$ ,  $t_0$  étant l'instant où les parois chaudes sont portées subitement à la température  $T_c$ , on a sur toutes les parois :  $\omega = 0, u = 0, v = 0, \psi = 0$  et  $T = T_f$

Conditions aux limites :

A l'instant  $t > t_0$ , on applique aux parois de la cavité les conditions suivantes :

- sur la paroi froide :  $u = 0, v = 0, \psi = 0, T = T_f$  et  $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$

- sur la paroi chaude :  $u = 0, v = 0, \psi = 0, T = T_c$  et  $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$

- sur les parois adiabatiques :  $u = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0$  et  $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

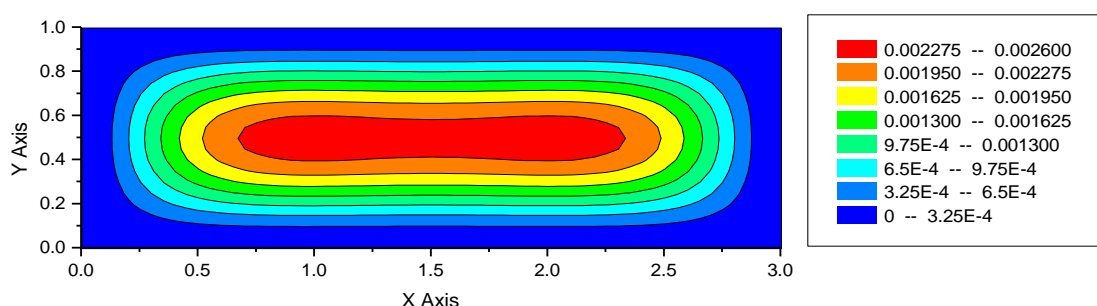
**2.2 Résolution numérique :** Les équations de conservation décrivant l'écoulement et le transfert thermique sont résolues en approchant les dérivées partielles par des différences finies. Les dérivées temporelles sont approchées par une différence finie du premier ordre entre les instants  $t - \Delta t$  et  $t$  ( $\Delta t$  étant le pas de temps). Les dérivées spatiales sont approchées par des différences finies centrées à travers le volume de contrôle.

L'équation (4) donnant la fonction de courant est résolue par une méthode itérative. Un coefficient de sur relaxation est utilisé pour accélérer la convergence. Cette convergence de la procédure itérative est atteinte lorsque le test suivant est vérifié à chaque pas de temps :

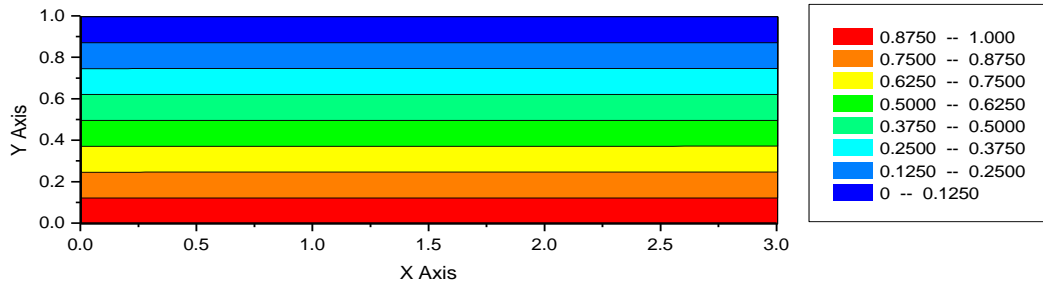
$$\left| \frac{\psi(i, j) - \psi^{sup}(i, j)}{\psi(i, j)} \right| \leq 10^{-6}$$

### 3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

**3.1 Structure monocellulaire pour Ra = 657,5 :** L'écoulement représenté sur la figure 2.a est fait d'une cellule convective avec des valeurs de fonctions de courant très faibles signifiant que le mouvement de convection est très lent. Les isothermes (figure 2.b) sont des surfaces parallèles horizontales et leur répartition montre que la température varie linéairement du plancher vers le plafond. Ceci informe que la convection est très faible et que le mode de transfert qui domine est la conduction.

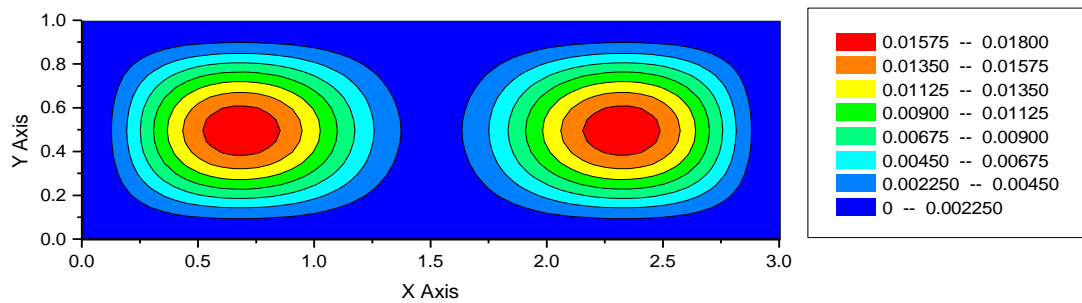


**Figure 2.a :** La figure montre les lignes de courant pour Ra = 657,5.

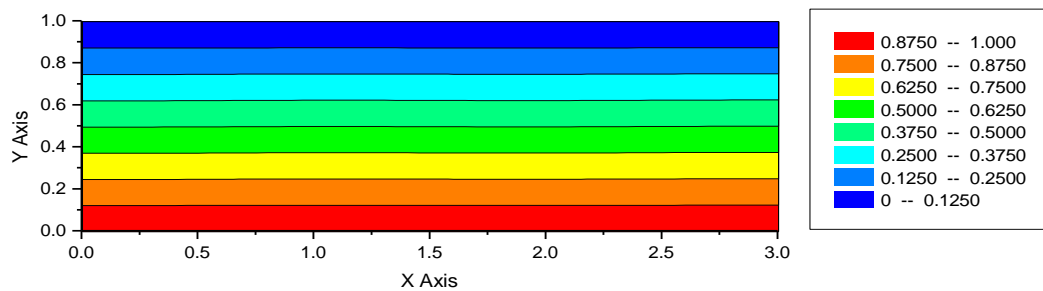


**Figure 2.b :** La figure montre les isothermes pour  $Ra = 657,5$ .

**3.2 Structure à deux cellules convectives pour  $Ra = 1\ 800$  :** L'écoulement présente deux cellules de convection (figure 3.a) dont le sens du mouvement de rotation est le même. Les valeurs de la fonction de courant sont toujours faibles, comme précédemment. Les isothermes sont ici aussi, des couches parallèles horizontales (figure 3.b). Pour cette valeur de  $Ra$  donc, c'est encore la conduction qui prédomine.

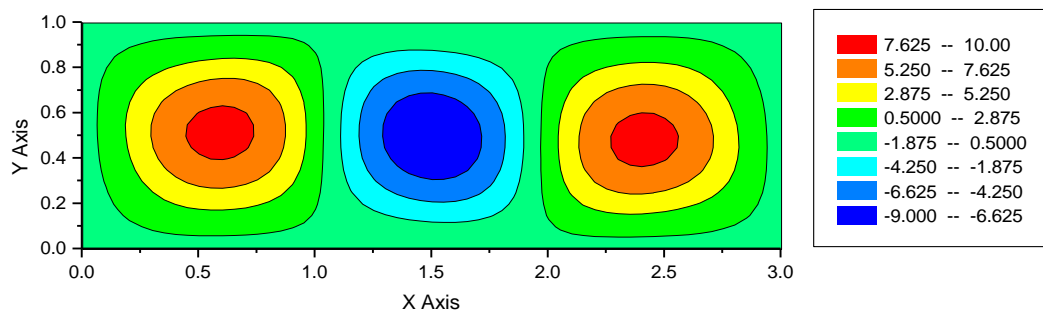


**Figure 3.a :** La figure montre les lignes de courant,  $Ra = 1\ 800$ .

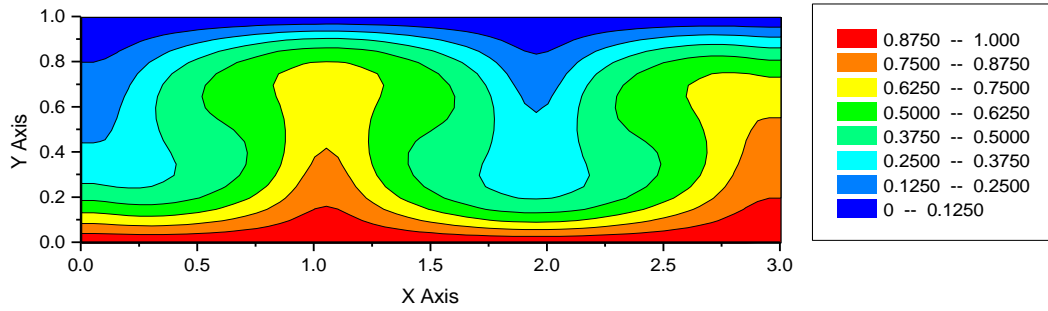


**Figure 3.b:** La figure montre les isothermes,  $Ra = 1\ 800$ .

**3.3 Structure à trois cellules convectives pour  $Ra = 10\ 000$  :** La figure 4.a montre que l'écoulement est constitué de trois cellules convectives. Pour les deux cellules extrêmes, la couleur varie du rouge au vert, signifiant que la fonction de courant est positive, les cellules tournent donc dans le sens trigonométrique. Pour celle du milieu, la couleur dominante est le bleu signifiant une fonction de courant négative et une rotation dans le sens horaire. Les isothermes changent d'allure et présentent des distorsions dans les zones de séparation des cellules convectives (figure 4.b). Ceci signifie que la convection s'intensifie et que le mode de transfert dominant n'est plus la conduction. On remarque aussi une asymétrie, aussi bien des lignes de courant que des isothermes malgré que le système physique présente une symétrie parfaite par rapport au plan médian de la cavité. Ceci est une caractéristique courante des instabilités hydrodynamiques.

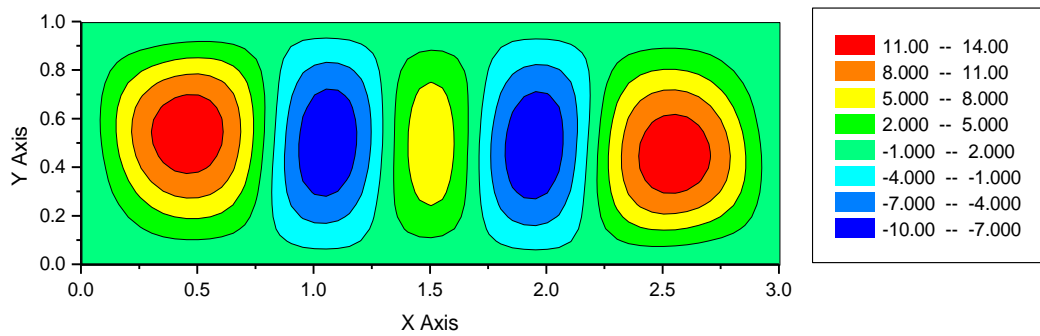


**Figure 4.a :** La figure montre les lignes de courant,  $Ra = 10\ 000$ .

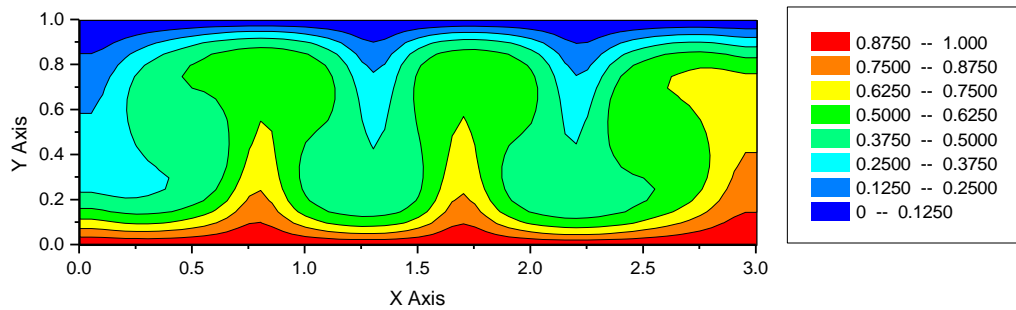


**Figure 4.b:** La figure montre les isothermes, Ra = 10 000.

**3.4 Structure à cinq cellules convectives pour Ra = 30 000 :** La structure de l'écoulement change considérablement pour Ra = 30 000. En effet, on peut noter sur la figure 5.a l'apparition de cinq rouleaux de convection. Les isothermes se présentent sous forme de panaches verticaux. Elles sont toujours réparties de manière asymétrique par rapport à l'axe médian de la cavité et présentent des distorsions (figure 5.b). En rapport avec la fonction de courant, ces distorsions se concentrent toujours aux niveaux des séparations entre les cellules convectives.

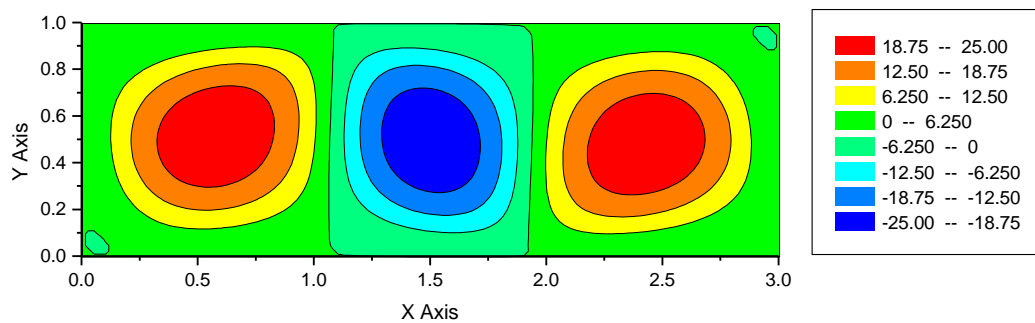


**Figure 5.a :** La figure montre les lignes de courant, Ra =30 000.

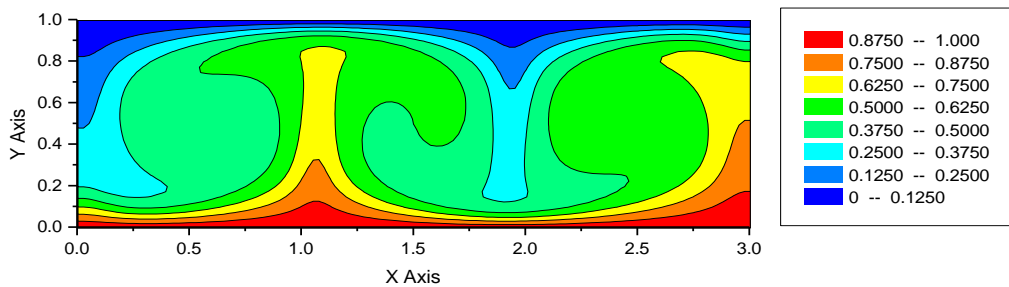


**Figure 5.b:** La figure montre les isothermes, Ra = 30 000.

**3.5 Retour à la structure à trois cellules convectives :** Pour Ra = 60 000, les lignes de courant forment trois cellules convectives dont les deux, se trouvant aux extrêmes, ont le même sens de rotation (figure 6.a). Les isothermes (figure 6.b) présente des distorsions dans les régions qui séparent les trois cellules.

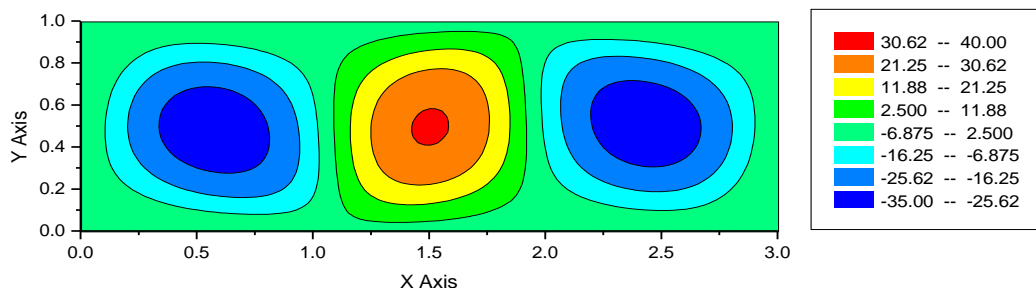


**Figure 5.a :** La figure montre les lignes de courant, Ra =60 000.

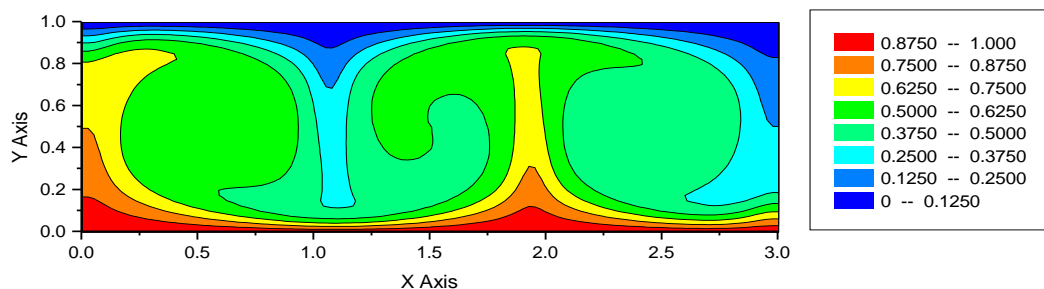


**Figure 5.b:** La figure montre les isothermes,  $Ra = 60\ 000$ .

Pour  $Ra = 100\ 000$ , sur la figure 5.c, on voit la présence de trois rouleaux de convection mais cette fois ci, ce sont les fonctions de courant des deux cellules extrêmes qui sont négatives. Elles tournent donc dans le sens horaire alors que la cellule du milieu tourne dans le sens trigonométrique. Sur la figure 5.d, les champs de température changent aussi de forme.

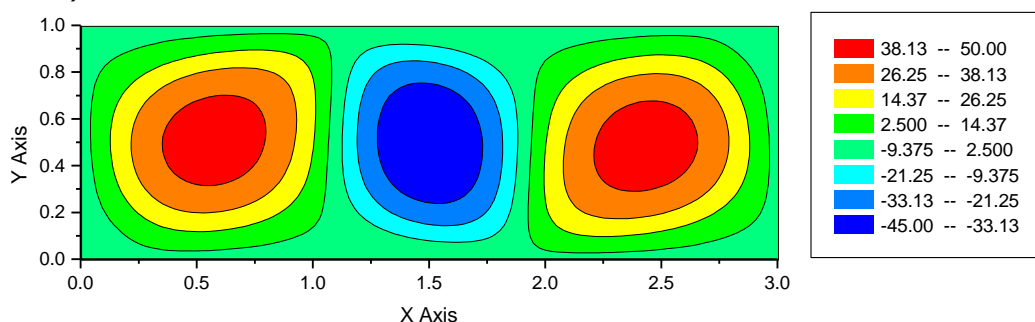


**Figure 5.c :** La figure montre les lignes de courant,  $Ra = 100\ 000$ .

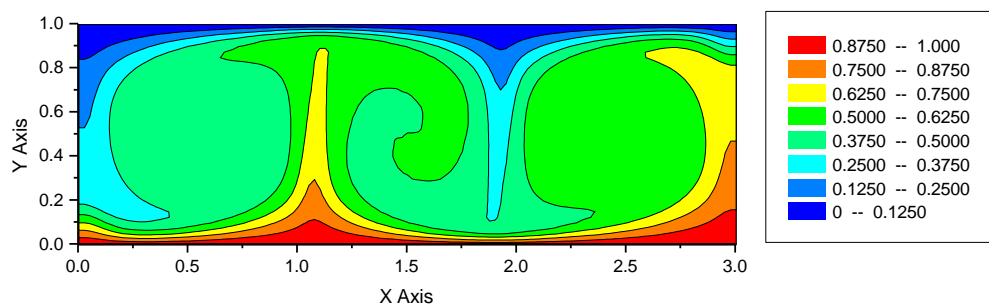


**Figure 5.d:** La figure montre les isothermes,  $Ra = 100\ 000$ .

Pour  $Ra = 200\ 000$ , Les lignes de courant sont formées par trois rouleaux de convection dont les deux extrêmes tournent dans le sens trigonométrique (figure 5.e), comme pour le cas où  $Ra = 60\ 000$ . Les isothermes sont formées par des panaches (figure 5.f).

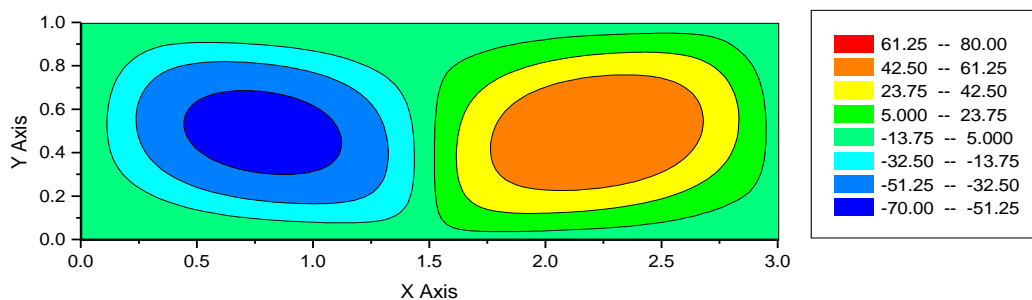


**Figure 5.e :** La figure montre les lignes de courant,  $Ra = 200\ 000$ .

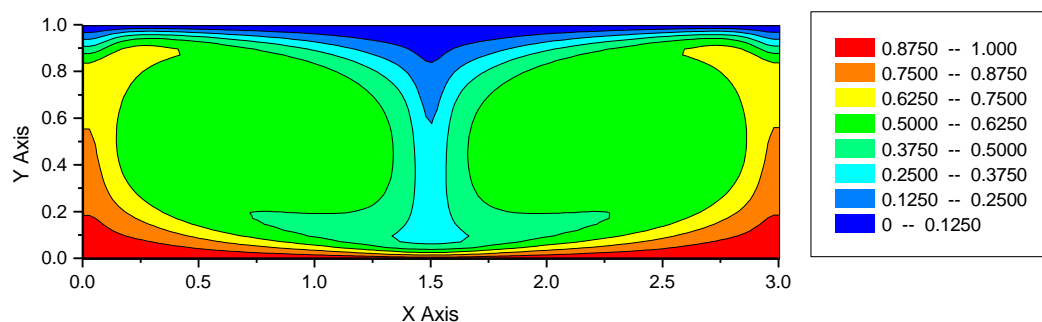


**Figure 5.f:** La figure montre les isothermes,  $Ra = 200\ 000$ .

**3.6 Retour à la structure à deux cellules convectives pour  $Ra = 300\ 000$  :** En ce qui concerne la structure spatiale de l'écoulement, les lignes de courant ne forment plus que deux cellules convectives (figure 6.a) contrarotatives. Sur la figure 6.b, les isothermes présentent des distorsions dans les régions qui séparent ces deux cellules.



**Figure 5.e :** La figure montre les lignes de courant,  $Ra = 300\ 000$



**Figure 5.f:** La figure montre les isothermes,  $Ra = 300\ 000$

## 4. CONCLUSION

L'étude numérique de la convection naturelle instationnaire se développant dans une enceinte rectangulaire, contenant de l'air, inclinée très légèrement par rapport à l'horizontal a été faite dans le but de mettre en évidence l'instabilité de l'écoulement. A l'issue de notre investigation, on a pu montrer que l'instabilité se manifeste au niveau de la structure spatiale de la convection. Ceci est matérialisé par le changement d'aspect des lignes de courant et des isothermes lorsque l'on fait varier le nombre de Rayleigh. Pour les lignes de courant, on est parti d'une cellule convective pour  $Ra = 657,5$ . Puis, au fur et à mesure que ce nombre augmente, on a vu que les cellules de convection se multiplient jusqu'à atteindre le nombre maximal de cinq pour  $Ra = 30\ 000$ . On constate ensuite que le nombre de cellules diminue en passant par trois cellules à partir de  $Ra = 60\ 000$  pour se stabiliser à deux lorsque  $Ra = 300\ 000$ . Nous constatons de plus que les valeurs de la fonction de courant ne cessent de croître avec le nombre de Rayleigh. Ceci signifie que l'accroissement du nombre de Rayleigh, donc de l'écart de température entre les deux parois horizontales, accentue le mouvement de convection.

En ce qui concerne les isothermes, leurs allures sont toujours en accord avec la formation des cellules convectives. Pendant la conduction, lorsque le nombre de Rayleigh est faible, on observe une stratification horizontale de la température, du plancher vers le plafond. Pendant les mouvements de convection, le champ de température se présente sous forme de panaches verticaux comportant des distorsions dans les zones de séparation des cellules.

## Nomenclature

### Lettres latines

a	hauteur de l'enceinte carrée, m
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
Pr	nombre de Prandtl ( $Pr = \nu/\alpha$ )
Ra	nombre de Rayleigh $Ra = g\beta(T_c - T_f)a^3/\alpha\nu$
T	température adimensionnelle
t	temps adimensionnel ( $t = t^*a^2/\alpha$ )
	$T = (T^* - T_f)/(T_c - T_f)$
u	vitesse adimensionnelle suivant l'axe x ( $u = u^*a/\alpha$ )
v	vitesse adimensionnelle suivant l'axe y ( $v = v^*a/\alpha$ )



$x, y$  coordonnées cartésiennes adimensionnelles  $(x, y) = (x^*, y^*)/a$

*Indices, exposant*

c chaud  
f froid  
\* grandeurs avec dimension

*Lettres grecques*

$\alpha$  diffusivité thermique,  $m^2s^{-1}$   
 $\beta$  coefficient d'expansion thermique,  $K^{-1}$   
 $\nu$  viscosité cinématique,  $m^2s^{-1}$   
 $\psi$  fonction de courant adimensionnelle ( $\psi = \psi^*/a$ )  
 $\omega$  vorticité adimensionnelle ( $\omega = \omega^*a^2/a$ )

## 5. REFERENCES

- [01] Latreche Abdelkrim. Etude numérique de la convection naturelle en milieux poreux saturée de fluide dans une cavité carrée à orientation variable. Mémoire de MAGISTERE, Algérie, Décembre 2010. Available on : [http://bu.umc.edu.dz/md/index.php?lvl=more\\_results&mode=keyword&user\\_query=Milieu+poreux&tags=ok](http://bu.umc.edu.dz/md/index.php?lvl=more_results&mode=keyword&user_query=Milieu+poreux&tags=ok).
- [02] Kholai O., Bellouar A, et Mahfoud K. Etude numérique de la convection mixte dans un tube incliné. 13<sup> mes</sup> Journées Internationales de Thermique JITH 2007, Albi, France, 2007. Available on : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00160479/document>.
- [03] Gillian Leplat. Stabilité d'un écoulement de convection naturelle en milieu confiné. Thèse de DOCTORAT, Boulon de l'Onera, Centre de Toulouse, 2009.
- [04] Skouta A., Randriazanamparany M. A, Dagu net M. Etude numérique de la convection naturelle instationnaire bidimensionnelle dans une enceinte allongée, de grand axe horizontal et de section carrée, inclinée à l'égard du plan horizontal et chauffée par deux côtés opposés. *Int. J. Therm. Sci.* 2001;40:352-365. Available on : [http://dx.doi.org/10.1016/s1290-0729\(01\)01228-5](http://dx.doi.org/10.1016/s1290-0729(01)01228-5)
- [05] Thierry Langlet, Haikel Ben Hamed, Rachid Bennacer, Habib Sammouda. Analyse de stabilité de la convection naturelle thermosolutale dans un milieu de Darcy. 13<sup> mes</sup> Journées Internationales de Thermique JITH 2007, Albi, France, 2007. Available on : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00154450/document>.
- [06] Draoui B., Benyamine M., Taibi R. et Hami O. Simulation numérique de la convection naturelle en régime laminaire et transitoire d'une Serre mono chapelle chauffée par le bas (flux). Chemss 2000, page 67-73, Béchar, Algérie, 2000.
- [07] Guestral Mabrouk « Modélisation de la convection naturelle laminaire dans une enceinte avec Paroi chauffée partiellement » Mémoire de MAGISTERE, Algérie, Janvier 2010.
- [08] Afraimovich V.S., and Shilnikov L.P. On invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity, American mathematical society translation (series 2). 1991;149:201-212..
- [09] Bianchi A.M., Fautrelle Y., and Etay, J. Transferts thermiques, Presses polytechnique et universitaire Romandes, Lausanne, 2004.
- [10] Aklouche-Benouaguef S., Zeghmati B., Aklouche FZ. « Bifurcations et multiplicité des solutions dans une cavit e allongée verticalement », 21<sup> </sup> Congrès Français de Mécanique, 2013

**Cite this article: Léonide TONGAZARA, Michel Aimé R., et Heriniaina Joeslin R. CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'INSTABILITE D'UN ECOULEMENT DE CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE. *American Journal of Innovative Research and Applied Sciences*. 2017; 5(3): 168-175.**

This is an Open Access article distributed in accordance with the Creative Commons Attribution Non Commercial (CC BY-NC 4.0) license, which permits others to distribute, remix, adapt, build upon this work non-commercially, and license their derivative works on different terms, provided the original work is properly cited and the use is non-commercial. See: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>